Correzione primo esercizio

19/11/2002

1) Sia Q la famiglia dei rettangoli chiusi in $\mathbb{R}^2$. Verificare che Q non è una σ-algebra.

Soluzione: secondo il Th 1.5.3 pag. 28 del libro di testo [Tesi], ogni aperto A in $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di cubi chiusi (aventi interni disgiunti e diagonale piccola a piacere). Dato che $A \notin Q$, ne segue l'asserto.

2) Sia $\mathcal{G}$ la famiglia degli aperti di uno spazio topologico. Dare un esempio in cui essa è una σ-algebra e uno in cui non lo è.

Soluzione: con X insieme arbitrario, le famiglie $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$ sono sia topologie, sia σ-algebre. Con $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \tau =$ topologia della retta reale, τ non è una σ-algebra (ad esempio, l'intersezione della famiglia numerabile $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ di intervalli aperti è l'insieme chiuso $\{0\}$).

3) Sia $\mathcal{C} = \{[0,1], [2,\infty)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$; trovare la σ-algebra minimale $\sigma_0(\mathcal{C})$.

Soluzione: si verifica facilmente che $\sigma_0(\mathcal{C})$ è data dalle unioni (disgiunte) di elementi della famiglia $\{\emptyset, (-\infty,0)\cup(1,2), [0,1], [2,\infty)\}$.

4) Dare su $\mathbb{R}$ due topologie tali che le rispettive famiglie degli insiemi di Borel siano diverse.

Soluzione: $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \Rightarrow \mathcal{B}_1 = \sigma_0(\mathcal{G}_1) = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$;

$\mathcal{G}_2 = \tau(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{B}_1 = \sigma_0(\tau(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

5) Costruire una successione di funzioni continue il cui estremo superiore sia una funzione non continua.

Soluzione: $f_n(x) = 1 - x^n$, $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \left(\sup_n f_n\right)(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

6) Costruire una famiglia di funzioni misurabili il cui estremo superiore non sia misurabile. Può tale famiglia essere numerabile?

<u>Soluzione</u>: la famiglia non può essere numerabile, perché $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$.

Per costruire la famiglia richiesta, ricordiamo che esiste un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non misurabile secondo Lebesgue; quindi la sua funzione caratteristica χ_E non è misurabile. Consideriamo ora la famiglia di funzioni caratteristiche $\{\chi_{\{x\}} \mid x \in E\}$; ogni $\chi_{\{x\}}$ è misurabile (perché l'insieme $\{x\}$ costituito dal solo punto x è misurabile secondo Lebesgue), ma

$$\chi_E = \sup_{x \in E} \chi_{\{x\}} \qquad \text{non lo è.}$$

7) Costruire una successione nondecrescente di funzioni semplici misurabili, ≥ 0 che converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

<u>Soluzione</u>: $f(x) = e^{-x^2}$ è continua, quindi misurabile, con codominio $(0,1]$. Si tratta solo di ripetere in concreto la dimostrazione del teorema di approssimazione (Th 5.3.2 pag. 131 del testo).

8) Dire se la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è misurabile.

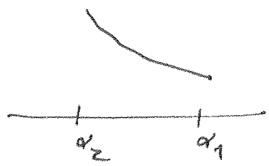
<u>Soluzione</u>: si tratta di studiare la misurabilità degli insiemi $\{f \geq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha > 1 \Rightarrow \{f \geq \alpha\} = \emptyset$, se $\alpha \leq -1 \Rightarrow \{f \geq \alpha\} = \mathbb{R}$. Se ~~α∈~~ $\alpha \in (-1, 1]$, $\{f \geq \alpha\}$ è unione numerabile di intervalli aperti e/o insiemi ridotti ad un punto (trovarne l'espressione analitica!), quindi è misurabile. Ne segue che la funzione è misurabile.

9) Sia $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$; poniamo $g : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ definendo $g(\alpha) := \mu(\{f \geq \alpha\})$. Verificare che g è ben definita ed è funzione nondecrescente.

Soluzione: poiché $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$, $E_\alpha := \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ $\forall \alpha$, quindi $g(\alpha) := \mu(E_\alpha)$ è ben definita. Sia poi $\alpha_1 \geq \alpha_2$; allora

$$x \in E_{\alpha_1} \Rightarrow f(x) \geq \alpha_1 \Rightarrow f(x) \geq \alpha_2 \Rightarrow x \in E_{\alpha_2}$$

$$\Rightarrow E_{\alpha_1} \subseteq E_{\alpha_2} \Rightarrow \mu(E_{\alpha_1}) \leq \mu(E_{\alpha_2}).$$



10) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Dire se la derivata $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è misurabile.

Soluzione: in ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta per definizione

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x+\frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}$$

Poiché f è derivabile $\Rightarrow$ f continua $\Rightarrow$ $g_k(x) := k\left[f(x+\frac{1}{k}) - f(x)\right]$ è continua $\forall k$ $\Rightarrow$ g_k è misurabile $\forall k$. Dunque f' è limite puntuale di una successione di funzioni misurabili $\Rightarrow$ f' è misurabile.

11) Sia $\{f_n\} \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$. Provare che gli insiemi:

$$E_1 := \{x \in X \mid \text{esiste} \lim_{n\to\infty} f_n\},$$

$$E_2 := \{x \in X \mid \text{esiste finito} \lim_{n\to\infty} f_n\}$$

sono misurabili.

Soluzione: si è provato che $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$ sono misurabili e che $f, g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A}) \Rightarrow \{f = g\} \in \mathcal{A}$. Allora

$$E_1 = \{\underline{\lim}\, f_n = \overline{\lim}\, f_n\} \in \mathcal{A}.$$

Si ha poi

$$E_2 = \{x \in E_1 \mid \lim f_n < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E_1 \mid \lim f_n \in k\} \in \mathcal{A}_{E_1}.$$

12) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue e uguali q.o. in $\mathbb{R}$ (rispetto alla misura di Lebesgue). Allora $f = g$ in $\mathbb{R}$.

<u>Soluzione</u>: per assurdo, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) > g(x_0)$. Poiché f, g sono continue, per il Teorema di permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > g(x)$ $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Allora risulta

$$\{f \neq g\} \supseteq (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\{f \neq g\}) \geq \lambda((x_0-\delta, x_0+\delta)) = 2\delta > 0,$$

contro l'ipotesi che $f = g$ q.o. in $\mathbb{R}$.

13) Sia $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile secondo Lebesgue. Provare che l'insieme $\{|f| < \infty\}$ è misurabile secondo Lebesgue.

<u>Soluzione</u>: $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) \Rightarrow \{|f| \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.
Ne segue che $\{|f| < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| \leq n\} \in \mathcal{A}$.

14) Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ poniamo

$$m^*(E) := \lambda^*([0,1] \cap E)$$

dove λ^* è la misura esterna di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Verificare che m^* è una misura esterna e caratterizzare la σ-algebra degli insiemi m^*-misurabili. La misura ottenuta per restrizione di m^* a tale σ-algebra è invariante per traslazioni?

<u>Soluzione</u>: la verifica è immediata. Gli insiemi m^*-misurabili sono per definizione quelli che

$$m^*(Z) = m^*(Z \cap E) + m^*(Z \cap \complement E) \qquad \forall\, Z \subseteq \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda^*(Z \cap [0,1]) = \lambda^*(Z \cap [0,1] \cap E) + \lambda^*(Z \cap [0,1] \cap \complement E)$$

$$= \lambda^*(Z \cap [0,1] \cap F) + \lambda^*(Z \cap [0,1] \cap \complement F),$$

dove $F := [0,1] \cap E$. Quindi la famiglia in questione è quella degli insiemi $E \subseteq \mathbb{R}$ la cui intersezione con $[0,1]$ è misurabile secondo Lebesgue (come sottoinsieme di $[0,1]$). La misura ottenuta per restrizione di m^* è la misura di Lebesgue dell'intersezione $[0,1] \cap E$; evidentemente non è invariante per traslazioni.

15) Sia $\mu^*: P(X) \to [0,\infty)$ definita ponendo

$$\mu^*(\emptyset) := 0 \quad , \quad \mu^*(E) := 1 \qquad \text{per ogni } E \subseteq X.$$

Verificare che μ^* è una misura esterna su X e determinare la σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili. Caratterizzare le funzioni $f: X \to \mathbb{R}$ misurabili.

<u>Soluzione</u>: la verifica è immediata. Se $E = \emptyset, X$ risulta

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap E) + \mu^*(Z \cap \complement E)$$
$$= \mu^*(\emptyset) + \mu^*(Z \cap X) = \mu^*(Z) \qquad \forall Z \subseteq X$$

$\Rightarrow$ $\emptyset, X$ sono μ^*-misurabili. Se $E \neq \emptyset$, $E \neq \emptyset$ risulta

$$\underbrace{\mu^*(X)}_{1} \overset{?}{=} \mu^*(X \cap E) + \mu^*(X \cap \complement E)$$
$$\overset{?}{=} \underbrace{\mu^*(E) + \mu^*(\complement E)}_{1+1=2}$$

, falso. Quindi solo $\emptyset, X$ sono misurabili. Con la σ-algebra $\{\emptyset, X\}$ solo le funzioni costanti sono misurabili.

16) Calcolare $\underline{\lim}_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}[x]\right)$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}[x]\right)$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}[x]\right)$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}[x]\right)$ $(x \in \mathbb{R})$.

<u>Soluzione</u>: si vede subito che $f_n(x) \equiv 0$ se $x \in [2k, 2k+1)$ $(k \in \mathbb{Z})$, mentre $f_n(x) = \{1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots\}$ se $x \in [2k+1, 2k+2)$. Quindi

$$\underline{\lim}\, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [2k, 2k+1) \\ -1 & \text{se } x \in [2k+1, 2k+2) \end{cases},$$

$$\overline{\lim}\, f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [2k, 2k+1) \\ 1 & \text{se } x \in [2k+1, 2k+2) \end{cases}.$$

Analogamente per $\cos\left(\frac{n\pi}{2}[x]\right)$.

17) Dire se le successioni $f_n(x) = n e^{-nx} \chi_{(0,1]}(x)$, $g_n(x) = n e^{-nx} \chi_{[0,1]}(x)$ convergono (i) puntualmente, (ii) q.o. (con la misura di Lebesgue) in $\mathbb{R}$

<u>Soluzione</u>: $f_n \to 0$ in $\mathbb{R}$ puntualmente, quindi q.o.

$g_n \to 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g_n(0) = n \to \infty$: quindi non converge puntualmente (nel senso che il limite non è finito ovunque), ma converge q.o. (perché $\lambda(\{0\}) = 0$).