NUMERI RAZIONALI ED ESTREMO SUPERIORE

Una delle proprietà fondamentali dei numeri reali è la seguente:

Teorema 1. *Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore in $\mathbb{R}$.*

Questo risultato non vale se si lavora nell'insieme dei numeri razionali: nei numeri razionali si può introdurre la definizione di estremo superiore esattamente come nei reali (e cioè: il più piccolo dei maggioranti dell'insieme considerato), tuttavia esistono insiemi limitati superiormente di numeri razionali che non ammettono estremo superiore nei razionali (ovviamente, essendo sottoinsiemi dei numeri reali, ammettono estremo superiore nei reali).

Proposizione 1. *L'insieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \ : x > 0\,,\ x^2 < 2 \right\}$$

è non vuoto e limitato superiormente, ma non ammette estremo superiore nei razionali.

Dimostrazione. L'insieme A è un insieme non vuoto (evidentemente $1 \in A$), limitato superiormente (infatti 2 è un maggiorante, dal momento che ogni numero più grande di 2 ha il quadrato più grande di 4 e quindi non appartiene ad A). Intendiamo provare che A non ammette estremo superiore nei razionali. Supponiamo che esista $\lambda \in \mathbb{Q}$ che sia estremo superiore di A. Evidentemente $\lambda \geq 1$, perché deve maggiorare 1 che appartiene ad A.

- **Proviamo che non può aversi** $\lambda^2 < 2$. Se fosse $\lambda^2 < 2$, possiamo considerare il numero $\lambda + \frac{1}{n}$, con n intero. Questo è razionale (perché λ lo è per ipotesi) e positivo. D'altra parte si ha

  $$\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^2 = \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n}\,,$$

  e questa ultima quantità è più piccola di 2 se si sceglie $n > \frac{2\lambda+1}{2-\lambda^2}$. Quindi con questa scelta di n si ha $(\lambda + \frac{1}{n})^2 < 2$, cioè $\lambda + \frac{1}{n} \in A$. Questo è assurdo, perché nessun elemento di A può essere più grande di λ.

- **Proviamo che non può aversi** $\lambda^2 > 2$. Se fosse $\lambda^2 > 2$, possiamo considerare il numero $\lambda - \frac{1}{n}$, con n intero. Questo è razionale e non negativo. Inoltre si ha

  $$\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)^2 = \lambda^2 - \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n^2} > \lambda^2 - \frac{2\lambda}{n}\,,$$

  e l'ultima quantità è > 2 non appena $n > \frac{2\lambda}{\lambda^2-2}$. Quindi con questa scelta di n si ha $(\lambda - \frac{1}{n})^2 > 2$. Questo ci permette di dire che $\lambda - \frac{1}{n}$ è un maggiorante di A: se $x > \lambda - \frac{1}{n} \geq 0$, allora $x^2 > (\lambda - \frac{1}{n})^2 > 2$, quindi $x \notin A$. Ma allora abbiamo trovato un maggiorante di A più piccolo di $\sup A$, e ciò è assurdo.

In definitiva, l'unica possibilità è che $\lambda^2 = 2$. Tuttavia a lezione abbiamo provato che nessun razionale verifica questa proprietà. Questo completa la dimostrazione. $\square$

Se lavoriamo nei reali, possiamo adattare la precedente dimostrazione per provare il seguente risultato:

Teorema 2. *Sia $a \in \mathbb{R}$, con $a \geq 0$. Allora esiste un unico $\lambda \geq 0$ tale che $\lambda^2 = a$. Tale λ viene chiamato "radice quadrata di a".*

Dimostrazione. Se $a = 0$, l'enunciato è ovvio. Se invece $a > 0$, consideriamo l'insieme

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : x > 0\,,\ x^2 < a \right\}.$$

Ovviamente B è un insieme non vuoto (se $a > 1$, allora $1 \in B$; se $a = 1$, allora $\frac{1}{2} \in B$; se $0 < a < 1$, allora $a \in B$) ed è limitato superiormente (se $a \geq 1$, allora a è un maggiorante di B; se $0 < a < 1$, allora 1 è un maggiorante).

Sia $\lambda = \sup B > 0$. Con la tecnica della precedente dimostrazione si prova facilmente che non può aversi $\lambda^2 < a$ né $\lambda^2 > a$. Pertanto $\lambda^2 = a$.

L'unicità di un tale numero segue dal fatto che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. $\square$

Osservazione 1. Ovviamente l'esistenza della radice quadrata di a si può ottenere anche dal teorema dei valori intermedi per le funzioni continue, applicato a $f(x) = x^2$. Tuttavia il metodo sopra descritto non necessita del concetto di continuità (cioè in definitiva del concetto di limite).
