IL PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI/-ESIMI

Andrea Cristofaro - Andrea Dall'Aglio

Molti dei limiti notevoli studiati permettono di confrontare il comportamento di alcune funzioni, quando $x \to x_0$, con funzioni più elementari. Ad esempio il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1}$$

viene spesso riassunto nella frase "$\sin x$ si comporta come x per $x \to 0$". Quindi, quando si studia il limite per $x \to 0$ di una funzione in cui compare $\sin x$, lo studente può avere la tentazione di sostituirlo con x. Analogamente, sempre per $x \to 0$, potrebbe pensare di sostituire $1 - \cos x$ con $x^2/2$.

Talvolta queste sostituzioni sono corrette, talvolta non lo sono. Vediamo quindi di chiarire questo punto.

Cominciamo col ricordare che due funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, che supporremo diverse da zero in un intorno di x_0 escluso al più il punto x_0, si dicono **asintoticamente equivalenti** (in formule $f_1(x) \sim f_2(x)$) per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$$

Per esempio, per (1), si ha $\sin x \sim x$ per $x \to 0$.

Prendiamo ora due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ asintoticamente equivalenti per $x \to x_0$. Supponiamo di voler calcolare il limite per $x \to x_0$ di una qualche funzione la cui espressione contenga $f_1(x)$. Siamo autorizzati a sostituire a $f_1(x)$ la funzione $f_2(x)$ in tale espressione? La risposta è in generale negativa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1. Vogliamo calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$. Proviamo a riscrivere la funzione in una forma più conveniente per i nostri scopi. Poiché $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, si ha

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Sfruttando ora i limiti notevoli (1) e

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

possiamo affermare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte, le funzioni $\tan x$ e $\sin x$ sono entrambe asintoticamente equivalenti a x per $x \to 0$. Se avessimo effettuato la sostituzione diretta avremmo ottenuto il seguente risultato

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \sim \frac{x - x}{x^3} = \frac{0}{x^3} = 0,$$

in contraddizione con il valore del limite ottenuto in precedenza con il procedimento corretto. Questo fatto mostra come non sia possibile in generale sostituire gli infinitesimi all'interno di una somma. $\square$

Analogamente, la sostituzione di un infinito o un infinitesimo con uno equivalente porta in generale a conclusioni errate se viene effettuata in una composizione di funzioni.

Esempio 2. Quando $x \to +\infty$ si ha $(x+1)^2 \sim x^2$, tuttavia il seguente calcolo è errato:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x+1)^2}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1\,,$$

in quanto un calcolo corretto fornisce

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x+1)^2}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+2x+1}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x+1} = +\infty\,.$$

Esempio 3. Similmente, se consideriamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)}{x}\,,$$

un calcolo corretto tramite la formula di Taylor fornisce $-1/2$. Cosa sarebbe accaduto se avessimo sostituito a $\frac{\log(1+x)}{x}$ il suo limite 1 direttamente nell'espressione precedente? Avremmo ottenuto 0 come valore del limite, commettendo un grave errore.

Cosa si può dire invece riguardo alla sostituzione in un rapporto?

Esempio 4. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\log(1+x)}\,;$$

con ovvi passaggi otteniamo

$$\frac{\sin x^2}{\log(1+x)} = \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\ \frac{x^2}{x}\ \underbrace{\frac{x}{\log(1+x)}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} = \big(1 + o(1)\big)\,x\,,$$

da cui segue che il limite vale 0. Come si vede, in questo caso il procedimento è equivalente a sostituire $\sin x^2$ con x^2, e $\log(1+x)$ con x. $\square$

Procedendo in modo simile, si dimostra il seguente importante (ma elementare) risultato.

Teorema 1 (Principio di sostituzione degli infiniti/infinitesimi). *Siano date sei funzioni $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x), h_1(x)$ e $h_2(x)$ tali che*

$$f_1(x) \sim f_2(x),\ \ g_1(x) \sim g_2(x),\ \ h_1(x) \sim h_2(x) \quad \textit{per } x \to x_0 \in \mathbb{R}^*.$$

Allora si ha anche

$$\frac{f_1(x)\,g_1(x)}{h_1(x)} \sim \frac{f_2(x)\,g_2(x)}{h_2(x)} \quad \textit{per } x \to x_0 \in \mathbb{R}^*,$$

in particolare i limiti dei due rapporti (se esistono) coincidono.

Il precedente teorema ci autorizza dunque a scrivere equivalenze come:

$$(e^{2x}-1)\sin x^2 \sim 2x^3, \ \frac{\log(1+x^3)}{\cos x^2 - 1} \sim -\frac{2}{x} \quad \text{per } x \to 0.$$

Osservazione 1. Abbiamo visto nell'esempio 1 che in generale non è corretto sostituire gli infinitesimi all'interno di una somma o di una differenza. Questo non significa però che non esistano casi in cui il limite calcolato tramite sostituzione abbia lo stesso valore di quello calcolato con il metodo standard; effettivamente esistono casi dove l'operazione di sostituzione in una somma conduce al risultato esatto. Non è affatto immediato però distinguere i casi "buoni" da quelli "cattivi"; in un certo senso, bisognerebbe conoscere già il comportamento della somma degli infinitesimi che stiamo sostituendo (l'osservazione successiva costituisce un passo in questa direzione). Per questo motivo **applicheremo la sostituzione degli infiniti o degli infinitesimi soltanto a prodotti e rapporti, mai a somme, differenze o altre operazioni tra funzioni.**

Osservazione 2. Tuttavia una somma di infiniti o infinitesimi può, in molti casi, essere sostituita **complessivamente** con un infinito o infinitesimo equivalente. Ad esempio, se si ha

$$g(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \to x_0\,, \tag{2}$$

intendendo con ciò che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\,,$$

allora è chiaro che

$$f(x) + g(x) \sim f(x)\,, \quad \text{per } x \to x_0\,,$$

dal momento che

$$f(x) + g(x) = f(x) \underbrace{\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \sim f(x)\,.$$

Si osservi che, se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi per $x \to x_0$, allora la (2) si legge

"$g(x)$ è un infinitesimo di ordine **superiore** rispetto a $f(x)$" ,

mentre se $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti per $x \to x_0$, allora la (2) si legge

"$g(x)$ è un infinito di ordine **inferiore** rispetto a $f(x)$" .

Quindi si può affermare che:

$$\sin(3x) + \tan^2 x \sim \sin(3x) \sim 3x \quad \text{per } x \to 0\,,$$

$$e^{5x} + 7x^2 \sim e^{5x} \quad \text{per } x \to +\infty\,,$$

$$\frac{e^{5x} + 7x^2}{x^5 + x\arctan x} \sim \frac{e^{5x}}{x^5} \to +\infty \quad \text{per } x \to +\infty\,.$$

E' buona norma, in caso di dubbio, astenersi dall'effettuare la sostituzione di un infinitesimo, e procedere con cautela mettendo in evidenza i termini che sembrano essere "dominanti".