ALCUNI ESERCIZI SU GRAFICI DI FUNZIONI COMPOSTE ELEMENTARI E DOMINI DI DEFINIZIONE DI FUNZIONI

1. Grafici di Funzioni composte Elementari

Costruire i grafici qualitativi di:
1.1 $f(x) = |\cos x|$, **1.2** $f(x) = \frac{1}{|\cos x|}$, **1.3** $f(x) = \log|\cos x|$, **1.4** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |\cos x|$,
1.5 $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$,
1.6 $f(x) = 1 - (\sin(\arctan x))^2$, **1.7** $f(x) = \frac{1}{1-(\sin(\arctan x))^2}$,
1.8 $f(x) = \arctan(\log|x|)$.

2. Domini di Funzioni

Determinare il dominio di definizione delle seguenti funzioni:
2.1 $f(x) = \sqrt{5^{4x} + 2\sqrt{6}(5)^{2x} - 19}$, **2.2** $f(x) = \log\left(5^{4x} + 2\sqrt{6}(5)^{2x} - 19\right)$, **2.3** $f(x) = (5^{4x}+2\sqrt{6}(5)^{2x} - 19)^{-1}$,
2.4 $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}\right) - \frac{\pi}{4}}$, **2.5** $f(x) = \sqrt{\log_{(\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}\right) - 2}$,
2.6 $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2-1}\right)}$,
2.7 $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2+\cos x}{4-2\sin x-\cos x}\right)$.

3. Soluzioni

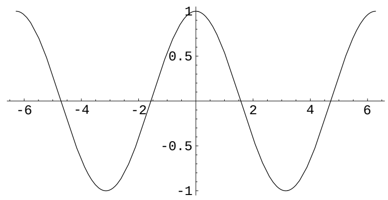
Ricordiamo che

$$\{f\nearrow, g\nearrow\}\ \text{oppure}\ \{f\searrow, g\searrow\} \Rightarrow\ g\circ f\nearrow$$
$$\{f\nearrow, g\searrow\}\ \text{oppure}\ \{f\searrow, g\nearrow\} \Rightarrow\ g\circ f\searrow$$

Poichè il grafico della funzione

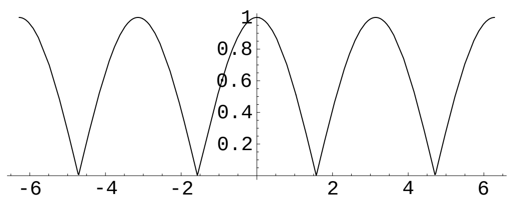
$$g(x) = \cos x$$

è il seguente,

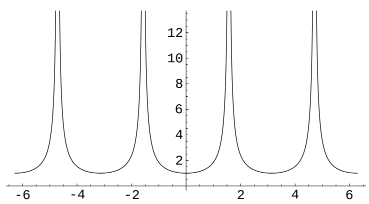


ne deduciamo che

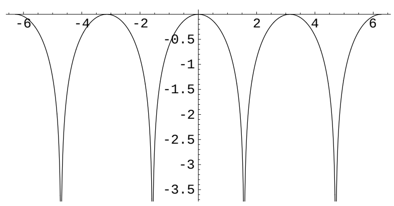
1.1 $f(x) = |g(x)| = |\cos x|$,



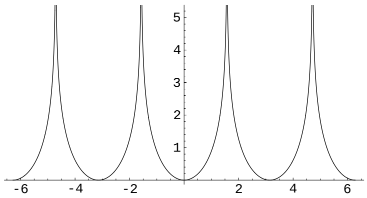
1.2 $f(x) = \frac{1}{|g(x)|} = \frac{1}{|\cos x|}$,



1.3 $f(x) = \log|g(x)| = \log|\cos x|$,

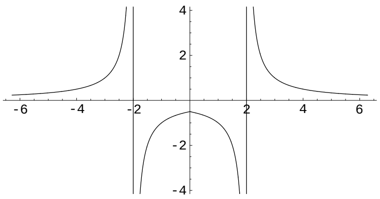


1.4 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |g(x)| = \log_{\frac{1}{2}} |\cos x|$,

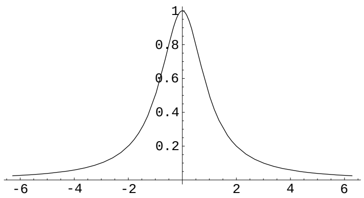


A partire dai grafici delle funzioni $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \arctan x$ e $g_3(x) = \log x$, si possono dedurre i seguenti grafici qualitativi:

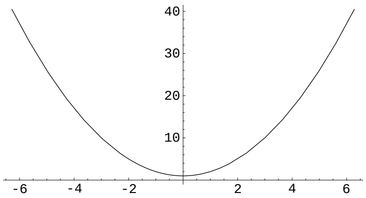
1.5 $f(x) = \frac{1}{|x|-2} = \frac{1}{|g_1(x)|-2}$,



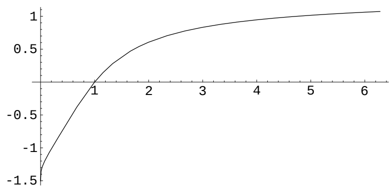
1.6 $f(x) = 1 - (\sin(g_2(x)))^2 = 1 - (\sin(\arctan x))^2$,



1.7 $f(x) = \frac{1}{1-(\sin(g_2(x)))^2} = \frac{1}{1-(\sin(\arctan x))^2}$,



1.8 $f(x) = \arctan(g_3(x)) = \arctan(\log x)$,



2.1 $f(x) = \sqrt{5^{4x} + 2\sqrt{6}(5)^{2x} - 19}$

Svolgimento

L' argomento della radice deve essere non negativo. Quindi, poniamo $y = 5^{2x}$ e studiamo la disequazione

$$y^2 + 2\sqrt{6}y - 19 \geq 0.$$

Si ha

$y_{\pm} = -\sqrt{6} \pm \sqrt{6+19} = -\sqrt{6} \pm 5; \Rightarrow y_+ = -\sqrt{6} + 5,\ \ y_- = -\sqrt{6} - 5,\ \Rightarrow 5^{2x} \leq -\sqrt{6} - 5,\ 5^{2x} \geq -\sqrt{6} + 5.$

Dobbiamo quindi trovare l' insieme unione delle soluzioni delle due disequazioni

$$5^{2x} \leq -\sqrt{6} - 5,\ \ 5^{2x} \geq -\sqrt{6} + 5.$$

Dato che $5^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rimane solo $5^{2x} \geq -\sqrt{6}+5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}\log_5(-\sqrt{6}+5) = \log_5(\sqrt{-\sqrt{6}+5})$. Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \log_5(\sqrt{-\sqrt{6}+5})\}$.$\square$

2.2 $f(x) = \log(5^{4x} + 2\sqrt{6}(5)^{2x} - 19)$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > \log_5(\sqrt{-\sqrt{6}+5})\}$.

2.3 $f(x) = (5^{4x} + 2\sqrt{6}(5)^{2x} - 19)^{-1}$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \log_5(\sqrt{-\sqrt{6}+5})\}$.

2.4 $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}\right) - \frac{\pi}{4}}$

Svolgimento

Per la non negatività della radice,

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}\right) - \frac{\pi}{4} \geq 0.$$

Dato che arcsin è definita in $[-1,1]$ e $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, dobbiamo imporre $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}$ e $\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1} \leq 1$. Notare che il denominatore della frazione non si annulla mai. Dobbiamo quindi studiare il sistema

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1} \leq 1, \\ \frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x^2 \leq 1, \\ x^2 \geq 1, \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \leq x \leq -1,\ 1 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\}$.$\square$

2.5 $f(x) = \sqrt{\log_{(\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}\right) - 2}$

Svolgimento

Per determinare il dominio di definizione, imponiamo inizialmente la non negatività della radice, ovvero

$$\log_{(\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1}\right) \geq 2.$$

Risolvendo logaritmo in base $(\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}}$ si ha

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2+1} \geq ((\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}})^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Notare anche che questa condizione assicura che il log è ben definito. Inoltre, osserviamo che la condizione ottenuta coincide quella dell' Esercizio 2.3. Quindi, come sopra, si ha
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \leq x \leq -1,\ 1 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\}$. $\square$

2.6 $f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{x^2-1}\right)}$, $D_f = \emptyset$.

2.7 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2+\cos x}{4-2\sin x-\cos x}\right)$.

Svolgimento

Imponendo la positività dell' argomento del primo logaritmo, otteniamo

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2+\cos x}{4-2\sin x-\cos x}\right) > 0.$$

Dato che la base del logaritmo è minore di 1, l' argomento deve a sua volta essere positivo e il denominatore della frazione diverso da zero, dobbiamo imporre

$$0 < \frac{2+\cos x}{4-2\sin x-\cos x} < 1, \quad 4-2\sin x-\cos x \neq 0.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{2+\cos x}{4-2\sin x-\cos x} > 0, \\ \\ \frac{2+\cos x}{4-2\sin x-\cos x} < 1, \\ \\ 4-2\sin x-\cos x \neq 0. \end{cases}$$

Osservare che $2+\cos x \geq 2-1 = 1 > 0$ e $4-2\sin x-\cos x \geq 4-2-1 = 1 > 0$. Dunque la prima disequazione e la terza condizione sono sempre verificate. Rimane solo lo studio della seconda disequazione. Dato che il denominatore è sempre positivo, si deve risolvere solo la seguente disequazione

$$2+\cos x < 4-2\sin x-\cos x, \;\Rightarrow\; 2\sin x+2\cos x-2 < 0, \;\Rightarrow\; \sin x+\cos x-1 < 0.$$

A questo punto si può risolvere la disequazione graficamente o passando alla $\tan\frac{x}{2}$. Nel caso della discussione grafica, si pone $X = \cos x$, $Y = \sin x$ e si risolve il sistema

$$\begin{cases} X+Y-1 < 0, \\ \\ X^2+Y^2 = 1 \end{cases}$$

Si ottiene $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi$. Altrimenti, con il metodo algebrico, per $x \neq \pi + 2k\pi$ si studia

$$2\tan\frac{x}{2} + 1 - \tan^2\frac{x}{2} - 1 - \tan^2\frac{x}{2} < 0, \;\Rightarrow \tan\frac{x}{2}(1-\tan\frac{x}{2}) < 0, \quad (*)$$

e si analizza separatamente il caso $x = \pi + 2k\pi$. Per $x = \pi + 2k\pi$ la disequazione iniziale in sin e cos risulta sempre verificata. Per risolvere la disequazione $(*)$, si pone $y = \tan\frac{x}{2}$ e si studia la disequazione $y(1-y) < 0$. Quest' ultima è verificata per $y < 0$ e $y > 1$, e quindi dobbiamo determinare l' insieme unione delle soluzioni delle due disequazioni $\tan\frac{x}{2} < 0, \tan\frac{x}{2} > 1$. Si trovano nell' ordine $k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}$, ovvero $2k\pi - \pi < x < 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \pi$, e aggiungendo nuovamente le soluzioni $x = \pi + 2k\pi$, si ha $2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi$.
Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi\}$.□