Foglio n. 6 di esercizi: derivazione sotto segno di integrale, Teorema di Stokes, teorema delle funzioni implicite

1 Derivazione sotto il segno di integrale

1.1 Derivare la funzione

$$g(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^2+1} e^{y^2(1+x^3)}\, dy\,.$$

2 Teorema di Stokes nello spazio

2.1 Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo scalare, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Dire se le seguenti espressioni hanno senso, e in tal caso dire se il risultato è un vettore o uno scalare

a) $\operatorname{rot}(f\nabla f) - \operatorname{div} F$;
b) $\operatorname{div}\operatorname{rot} F\ - f$;
c) $\operatorname{rot}(F\ \operatorname{div} F)$;
d) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} F - \operatorname{rot} F$;
e) $\operatorname{rot}\ \operatorname{div} F + \operatorname{rot} F$.

2.2 Dato il campo di forze

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2y^3, -x^3, 2z^3)\,,$$

calcolare il lavoro da esso compiuto quando agisce su un punto materiale che compie un giro completo lungo la curva intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con il piano $x + y + z = 1$, orientata in modo arbitrario. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-2002_04_15_soluz.pdf`)

2.3 Calcolare $\int_\Sigma (\operatorname{rot}\mathbf{F}, \nu)\, d\sigma$, dove $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, z^2+y^2, zy)$ e Σ è la porzione della superficie $x^2+y^2+z^2 = 2$ contenuta in $x \ge 0$, $z \ge 0$, e ν è il versore normale alla superficie.

2.4 Calcolare, mediante un opportuno integrale **di superficie**, l'integrale curvilineo

$$\int_C x^3\, dx + (x+y)\, dy + (x+y+z^2)\, dz\,,$$

dove

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = 4\ ,\ z = 2(x+y)\right\}.$$

3 Teorema delle funzioni implicite

3.1 Data l'equazione

$$y^4\cos x + e^{3x^2} + 4y - 3x + 2 = 0,$$

verificare che essa individua, in un intorno del punto $(0,-1)$, una funzione di una sola variabile, e studiare il comportamento di tale funzione vicino al punto considerato. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/Soluz_2001_12_15.pdf`)

3.2 Verificare che l'equazione

$$f(x,y,z) = \log\sqrt{1+x^2+y^2} - (z-1)e^z = 0$$

definisce implicitamente $z = f(x,y)$ in un intorno di $(0,0,1)$ e che la funzione così definita ha minimo relativo in $(0,0)$.

3.3 Sia E l'insieme dei punti (x,y) di $\mathbb{R}^2$ tali che $F(x,y) = 0$, essendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Si supponga che

$$F(3,2) = 0\,, \qquad F_x(3,2) = 4\,, \qquad F_y(3,2) = 0\,.$$

Motivando le risposte, dire quali tra le seguenti frasi sono sicuramente vere, quali sono sicuramente false, quali sono indecidibili usando solo i dati in nostro possesso.

a) L'insieme E è, in un intorno di $(3,2)$, il grafico di una funzione della forma $y = \varphi(x)$;

b) L'insieme E è, in un intorno di $(3,2)$, il grafico di una funzione della forma $x = \psi(y)$;

c) L'insieme E non è, in alcun intorno di $(3,2)$, il grafico di una funzione né della forma $y = \varphi(x)$, né della forma $x = \psi(y)$;

d) E ammette retta tangente in $(3,2)$, e tale retta ha equazione $x = 3$;

e) E ammette retta tangente in $(3,2)$, e tale retta ha equazione $y - 2 = x - 3$;

f) E non ammette retta tangente in $(3,2)$.

3.4 Verificare che l'equazione

$$(x+1)y^2 + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$$

individua, in un intorno del punto $(0,0)$, una funzione di una sola variabile, e studiare il comportamento di tale funzione in un intorno di 0. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-2002_07_26_soluz.pdf`)

3.5 Data l'equazione

$$(*) \qquad y^4 - \operatorname{sen} zy - e^{x^2} + 1 = 0\,,$$

provare che essa definisce implicitamente una funzione del tipo $y = \varphi(x, z)$ in un intorno del punto $(0, 0, 1)$. Calcolare, se esistono, il piano tangente e il versore normale alla superficie definita da $(*)$ nel punto $(0, 0, 1)$.

3.6 Mostrare che l'equazione

$$(x + y) \operatorname{sen}(x + y) + e^{xy} - 1 - \frac{\pi}{2} = 0$$

individua, in un intorno del punto $\left(0\,,\, \frac{\pi}{2}\right)$, una funzione di una sola variabile $y = \varphi(x)$. Dire se il punto $x = 0$ è punto di crescenza, decrescenza, minimo o massimo relativo per φ. Scrivere inoltre lo sviluppo di Taylor fino al second'ordine di $\varphi(x)$, centrato in $x_0 = 0$. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-sol-2003_07_25.pdf`)