Foglio n. 4 di esercizi: superfici e integrali di superficie

1 Superfici e integrali di superficie

1.1 Parametrizzare in modo regolare la parte della superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ verificante $x \geq 0$, $y \leq -x$, $z \geq -1$.

1.2 Trovare piano tangente e versore normale all'ellissoide $x^2+4y^2+9z^2 = 1$ nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

1.3 Determinare l'area della porzione di superficie $x^2 + z^2 = 1$ compresa tra le due superfici $y = 0$ e $y = (x+h)^2$, con $h > 1$. (**R:** $\pi\,(1 + 2h^2)$)

1.4 Disegnare la parte di superficie $z = 2y^2$ che ha per proiezione ortogonale sul piano xy il triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (3,1)$, e calcolarne l'area. (Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/Soluz_2001_12_15.pdf`)

1.5 Sulla superficie laterale di un cilindro circolare retto di raggio 1 e altezza 3, si consideri un segmento, di lunghezza pari all'altezza, parallelo all'asse del cilindro. Si scrivano le equazioni parametriche della superficie descritta dal segmento quando il cilindro rotola senza strisciare su un piano parallelo all'asse del cilindro. Calcolare l'area di tale superficie se il cilindro compie una rotazione completa.

1.6 Calcolare l'area della porzione di superficie di equazione $z = 5+3x^2+3y^2$ la cui proiezione sul piano xy è l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}\,.$$

1.7 Dire per quali $\alpha > 0$ è finita l'area della superficie (illimitata!)

$$S = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ z = (x^2 + y^2)^{-\alpha}\}\,.$$

1.8 Calcolare

$$\int_S z\, d\sigma\,,$$

dove S è la superficie laterale del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 3$.

1.9 Calcolare

$$\int_S \frac{1}{[1 + 4(x^2 + y^2)]^3}\, d\sigma\,,$$

dove S è il grafico della funzione $z = 2xy$, e (x, y) variano nel dominio D contenuto nei semipiani $y \geq 0$ e $y \leq -x$, delimitato dalla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine, dall'asse delle x e dalla retta $y = -x$.

1.10 Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S \frac{z(z-1)(x^2 + y^2)}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^3}}\, d\sigma\,,$$

dove S è la superficie definita da

$$S = \left\{(x, y, z) \ : \ z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2\,,\ 0 \leq z \leq 1\right\}\,.$$

(Soluzione disponibile all'indirizzo `http://www.dmmm.uniroma1.it/~aglio/cd3/CD3-sol-2003_07_25.pdf`)