Come sempre, si ricorda di fare **prima** esercizi dai testi consigliati.

1 Proprietà differenziali di funzioni di più variabili

Calcolare tutte le derivate direzionali delle seguenti funzioni nei punti indicati:

1.1 $f(x,y)=\sqrt{x^2y+5}, \qquad P=(0,1)$

1.2 $f(x,y)=\sqrt{x^2y+5}, \qquad P=(2,1)$

1.3 $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy), \qquad P=(\pi,\frac{1}{3})$

Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili e calcolare, qualora esistano, le derivate direzionali:

1.4 (∗)

$$f(x,y)=\begin{cases}\Big|\,|x|+|y|\,\Big|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

1.5 $f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

1.6 $f(x,y)=|x|\mathrm{e}^y$

1.7 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$

1.8 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Calcolare le derivate parziali (o dimostrare la loro non esistenza) per le seguenti funzioni:

1.9 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

1.10 $f(x,y)=|xy|$

1.11 $f(x,y)=|x-y|\,(x+y)$

1.12 (∗) Trovare estremi relativi ed assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y)=5+(x+\sin y)^3(x-\sin y)\,.$$

1.13 (∗) Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y)=\frac{2-x^2y^2}{\exp\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}\,.$$

1.14 Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x,y)=(2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1. Mostrare che l'origine è un estremo relativo per f.

1.15 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y)=e^{x^2-y^2}(x^4-y^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

1.16 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y)=\frac{x^4}{4}+y^2-\frac{5}{6}x^3+x^2-\frac{x}{2}$$

nel dominio $D=\{(x,y):|x|\le 2,|y|\le 2\}$.

1.17 (∗) Trovare massimi e minimi locali della funzione $f(x,y)=[(x-2)^2-9y^2-5]\exp(x+\frac{2-x^2+9y^2}{4})$

1.18 Data la funzione di due variabili

$$f(x,y)=\ln(8y-2x^2-2y^2)\,,$$

a) determinarne il dominio;
b) individuarne i punti critici;
c) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

1.19 Data la funzione di due variabili

$$f(x,y)=(e^{x+1}-1)\ln(1+y^2)+x^2-x\,,$$

a) individuarne i punti critici;
b) individuare eventuali punti di massimo o minimo relativi.

1.20 Data la funzione di due variabili $f(x,y)=4xy^2-x-3y$, determinarne i punti critici e classificarli. Inoltre trovare massimo e minimo assoluti nel quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

1.21 Data la funzione di due variabili $f(x,y)=x^3+(x+y)\,(y-3x)$, determinarne i punti critici e classificarli. Successivamente trovare massimo e minimo assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$.

1.22 Data la funzione

$$f(x, y) = e^{3x-y}(x^2 - y^2),$$

calcolarne i punti critici e classificarli. Successivamente calcolarne gli estremi assoluti nel triangolo (chiuso) di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$.

1.23 Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3y - 2y^2 + 3x^2y.$$

1.24 Data la funzione

$$f(x, y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1,$$

determinarne i punti critici e classificarli. Dire inoltre se f ammette massimo e minimo assoluti in $\mathbb{R}^2$.

2 Risposte ad alcuni esercizi

1.1: 0; **1.2:** $\frac{2}{3}(v_1 + v_2)$; **1.3:** $\frac{v_1 + \pi v_2}{6}$; **1.5:** nell'origine non è differenziabile (non è neanche continua); nell'origine le derivate direzionali sono tutte nulle; **1.6:** f non è differenziabile nei punti dell'asse y; in tali punti non esiste nessuna derivata direzionale, eccetto la derivata parziale rispetto alla y, che vale 0; **1.20:** $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$: punto di sella; $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$: punto di sella; max. assoluto nel quadrato: $f(1, 1) = 0$; min. assoluto nel quadrato: $f(0, 1) = -3$; **1.24:** $(0, 0)$ punto di massimo relativo; $(2, 0)$: punto di sella; $(0, \pm\sqrt{2})$: punti di sella; $(2, \pm\sqrt{2})$: punti di minimo relativo;