Funzioni: dominio, iniettività, monotonia, simmetrie, immagine, funzione inversa.

Dire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. Se il dominio non è indicato, calcolare il dominio naturale. Se il codominio non è indicato, prendere tutto $\mathbb{R}$. Se non sono suriettive, cercare di restringerne appropriatamente il codominio in modo da renderle tali. Se non sono iniettive, cercare di restringerne il dominio in modo da renderle iniettive. Dopo aver fatto ciò, si determini la funzione inversa.

1 $f\ :\ \left[-2\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -2 \le x < 0 \\ \\ 1 - \operatorname{tg} x & \text{se } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

2 $f\ :\ [0,2) \to [-1,1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1]\,, \\ x-2 & \text{se } x \in (1,2)\,. \end{cases}$$

3

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 6}\,.$$

4

$$f(x) = e^{x^3+x}\,.$$

5

$$f(x) = (1/2)^{x^2}\,.$$

6

$$f(x) = x^{8/3}\,.$$

7

$$f(x) = x^{11/3} - 1\,.$$

8

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } x \in [0,1]\,, \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in (1,3)\,. \end{cases}$$

Dire se le seguenti funzioni sono limitate in $\mathbb{R}$, e trovarne estremo superiore e inferiore:

9 $f(x) = \frac{x^4}{x^4+1}$.

10 $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$.

11 $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$.

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

12 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x - 1)}$

13 $f(x) = \log\left(x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\right)$

14 $f(x) = \log\left(x^2\sqrt{\dfrac{x^2-2}{x^2+1}}\right)$

15 $f(x) = \dfrac{3 - \log x}{2 + \log x}$

16 $f(x) = \dfrac{\log(5 - |x+3|)}{|x| - 1}$

17 $f(x) = \dfrac{\log(e^{2x} - 3e^x + 2) + \log|x-1|}{3 + cos\sqrt{5 - e^x}}$

18 $f(x) = \sqrt{3 + 4^{x+1/2} - 4^{2x}}$

19 $f(x) = \left(\log_3 \log_4 (x^2 - 5)\right)^{-4}$

20 $f(x) = \sqrt{\arccos \log_2(\operatorname{sen} e^x) - \dfrac{2\pi}{3}}$

21 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{3 - x - |6x^2 - 13x - 15|}}$

22 $f(x)$
$$= \frac{1}{\log_2\left(\sqrt{x^2-1} - 3x + 8\right) + \log_{1/4}(x^2 - 4x + 4)}$$

23 $f(x) = \sqrt[3]{\log_{\operatorname{sen}^4 x}(\ln(x-4))} + {} + \sqrt[4]{\log_{\operatorname{sen}^3 x}(\ln(x-4))}$

24 $f(x) = \sqrt{1 + \log_{2/\pi}\left(\arccos\dfrac{x}{x-1}\right)}$

25 $f(x) = \sqrt{\log_{1/2}\log_2\left(2\operatorname{sen}^2 x - \cos x\right)}$

26
$$f(x) = \log_2 \operatorname{arcsen}\frac{3x^2 - x^3}{2} + \sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}}$$

27 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2 + \cos x}{4 - 2\operatorname{sen} x - \cos x}$

28 $f(x) = \operatorname{arcsen}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{4\operatorname{sen} x + 1}{2\operatorname{sen} x + 2\cos x}$

29 $f(x) = \arccos\left(\log_2(-\cos x) - \log_4\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\right)\right)$

30 $f(x) = \log \dfrac{|\cos x| - \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi^2 - 9 \operatorname{arctg}^2 \left|\dfrac{x\sqrt{3}}{x+1}\right|}}$

Trovare il dominio delle seguenti funzioni e dire se sono pari, dispari oppure nessuna delle due cose:

31 $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

32 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$

33 $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$

34 $f(x) = \dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}$

---

35 Siano f_1 e f_2 funzioni crescenti, g_1 e g_2 funzioni decrescenti. Supponendo che le operazioni sottoindicate abbiano senso, dire se le funzioni risultanti sono crescenti, decrescenti (motivando la risposta), oppure se in generale non è possibile concludere:
a) $h_1(x) = f_1 \circ f_2(x)$;
b) $h_2(x) = g_1 \circ g_2(x)$;
c) $h_3(x) = f_1 \circ g_1(x)$;
d) $h_4(x) = g_1 \circ f_1(x)$;
e) $h_5(x) = f_1(x) + f_2(x)$;
f) $h_6(x) = f_1(x) - f_2(x)$;
g) $h_7(x) = f_1(x) + g_1(x)$;
h) $h_8(x) = f_1(x) - g_1(x)$;
i) $h_9(x) = g_1(x) + g_2(x)$;
j) $h_{10}(x) = g_1(x) - g_2(x)$;
k) $h_{11}(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

36 Dimostrare che l'inversa di una funzione strettamente crescente è strettamente crescente, e che l'inversa di una funzione strettamente decrescente è strettamente decrescente.

37 Trovare il dominio della funzione $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$, e disegnarne il grafico.

38 Trovare il dominio della funzione $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$, e disegnarne il grafico.

39 Data la funzione

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x} ,$$

calcolarne il dominio, studiarne la monotonia, e calcolarne, se esiste, la funzione inversa.

40 Trovare un intervallo non contenuto in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in cui invertire la funzione $\operatorname{sen} x$. Disegnare il grafico della funzione inversa così ottenuta e dire come si ottiene dall'ordinario $\operatorname{arcsen} x$.

41 Determinare la funzione inversa di $f(x) = 1 - 2^{-x}$

42 Trovare un intervallo non contenuto in $[0, \pi]$ in cui invertire la funzione $\cos x$. Disegnare il grafico della funzione inversa così ottenuta e dire come si ottiene dall'ordinario $\arccos x$.

43 Trovare un intervallo non contenuto in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ in cui invertire la funzione $\operatorname{tg} x$. Disegnare il grafico della funzione inversa così ottenuta e dire come si ottiene dall'ordinario $\operatorname{arctg} x$.

Calcolare dominio e immagine delle seguenti funzioni:

44 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$.

45 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Manipolazioni di grafici di funzioni

Si parta da un grafico già noto di una funzione $f(x)$, ad esempio prendendolo da un libro di esercizi sullo studio di funzioni. Senza svolgere calcoli, disegnare i grafici delle seguenti funzioni. Successivamente si usi un programma su PC per disegnare il vero grafico e verificare il risultato.

46 $f_1(x) = f(-x)$.

47 $f_2(x) = f(3-x)$.

48 $f_3(x) = f(3+x)$.

49 $f_4(x) = f(|x|)$.

50 $f_5(x) = f(|x-2|)$.

51 $f_6(x) = f(x^2)$.

52 $f_7(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

53 $f_8(x) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

54 $f_9(x) = f\left(\frac{1}{|x-1|}\right)$.

55 $f_{10}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

56 $f_{11}(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$.

57 $f_{12}(x) = 1 + \frac{1}{|f(x)|}$.

58 $f_{13}(x) = f(x)^2$.

59 $f_{14}(x) = \frac{1}{1-f(x)}$.

60 $f_{15}(x) = f(\operatorname{arctg} x)$.

61 $f_{16}(x) = \operatorname{arctg} f(x)$.

62 $f_{17}(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

63 $f_{18}(x) = \operatorname{sen} f(x)$.

64 $f_{19}(x) = \ln f(x)$.

65 $f_{20}(x) = f(\ln x)$.

66 $f_{21}(x) = f(\ln |x|)$.

1 Risposte ad alcuni esercizi

1: non è iniettiva né suriettiva; perché sia suriettiva bisogna prendere come codominio $(-\infty, 4]$; per renderla iniettiva si può (ad esempio) prendere come dominio $[-2,-1) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; la funzione inversa così individuata è $f^{-1} : (-\infty, 4] \to [-2,-1) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ definita da

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1-y) & \text{se } y \in (-\infty, 1], \\ -\sqrt{y} & \text{se } y \in (1, 4]. \end{cases}$$

2: è iniettiva ma non suriettiva; perché sia suriettiva bisogna prendere come codominio $(-1, 1]$; la sua funzione inversa è $f^{-1} : (-1, 1] \to [0, 2)$ definita da

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y+2 & \text{se } y \in (-1, 0), \\ y & \text{se } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

3: $\operatorname{dom} f = [-3, 2]$; $\operatorname{im} f = \left[0, \frac{5}{2}\right]$; il grafico di f è la semicirconferenza di centro $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{5}{2}$, contenuta nel semipiano $y \geq 0$; f non è iniettiva: lo diventa prendendo come dominio (ad esempio) l'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$; in tal caso la sua funzione inversa $f^{-1} : \left[0, \frac{5}{2}\right] \to \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ è definita da

$$f^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{25 - 4y^2}}{2}.$$

4: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $\operatorname{im} f = (0, +\infty)$; f è iniettiva perché strettamente crescente; la sua funzione inversa $f^{-1}(y)$ è definita come l'unica soluzione x di $x^3 + x = \ln y$.

5: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $\operatorname{im} f = (0, 1]$; f non è iniettiva: lo diventa prendendo come dominio (ad esempio) $[0, +\infty)$; in tal caso la sua funzione inversa $f^{-1} : (0, 1] \to [0, +\infty)$ è definita da $f^{-1}(y) = \sqrt{-\log_2 y}$.

6: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $\operatorname{im} f = [0, +\infty)$; f non è iniettiva: lo diventa prendendo come dominio (ad esempio) $[0, +\infty)$; in tal caso la sua funzione inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è definita da $f^{-1}(y) = y^{3/8}$.

7: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$; f è iniettiva perché strettamente crescente; la sua funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f^{-1}(y) = (y+1)^{3/11}$.

18: $x \leq \log_4 3$; **19:** $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$, con $x \neq \pm 3$; **20:** $\ln\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \leq x \leq \ln\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, oppure
$\ln\left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) \leq x \leq \ln\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, con $k \in \mathbb{N}$;

22: $x \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{24 + \sqrt{56}}{8}\right)$, $x \neq 2$, $x \neq \frac{40 + \sqrt{85}}{15}$.

23: $2\pi < x \leq e + 4$;

25: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, oppure
$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$, oppure
$\pi + 2k\pi < x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, oppure
$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

35: a) crescente; b) crescente; c) decrescente; d) decrescente; e) crescente; f) non si può dire; g) non si può dire; h) crescente; i) decrescente; j) non si può dire; k) non si può dire;