Studi di funzioni

Per le seguenti funzioni, studiare dominio, eventuale periodicità, eventuali simmetrie, limiti, asintoti, continuità, derivabilità, crescenza, decrescenza, estremi relativi ed assoluti, concavità, convessità, flessi; disegnarne approssimativamente il grafico.

1 $f(x) = \operatorname{sen} x \, e^{\sqrt{2}\cos x}$

2 $f(x) = \exp\left(\dfrac{3}{2(\ln x)^2}\right)$

3 $f(x) = x(\ln|x| - 1)$

4 $f(x) = x^2\left(\ln|x| - \dfrac{1}{2}\right)$

5 $f(x) = x^{1/3} - 2x^{-2/3}$

6 $f(x) = \ln 2 - \ln(e^{2x} - 5e^x + 6)$

7 $f(x) = \sin(2x) + (2\sqrt{2}+4)\cos x - 2(\sqrt{2}+1)x$

8 $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(37x + 2x^2 + 9\ln|x|\right)$

9 $f(x) = x - |x^2 + 8x + 1|^{1/2}$

10 $f(x) = x^2 - 2x + |x|$

11 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$

12 $f(x) = xe^{-x+1}$

13 $f(x) = xe^{x^2}$

14 $f(x) = x^{2/3}(1-x)$

15 $f(x) = x\,\dfrac{2\ln x + 3}{\ln x + 1}$

16 $f(x) = (12 - x^2)\,(x^2 - 8)^{1/3}$

17 $f(x) = e^{-2/x}\,(|x| + |x-1|)$

18 $f(x) = \sqrt[3]{\cos(2x) - \dfrac{1}{2}}$

19 $f(x) = \dfrac{2-x}{1 + \log|x-2|}$

20 $f(x) = (x-1)(\ln|x-1| - 2)^2$

21 $f(x) = e^{-x}(x+2)^{1/3}$

22 $f(x) = \sqrt{3 + |x^2 - 4|}$

23 $f(x) = \ln\dfrac{20x}{2x^2+3}$

24 $f(x) = \left|\ln\dfrac{20x}{2x^2+3}\right|$

25 $f(x) = \operatorname{sh}^3 x - 18\,|\operatorname{sh} x|$

26 $f(x) = \left|\dfrac{3}{4} - x^2\right| - \sqrt{2x^2 - 1}$

27 $f(x) = \arccos(\sqrt{|x|} - 1)$

28 $f(x) = \ln|3e^x - 2| - |x|$

29 $f(x) = \sqrt[5]{|27 - x^3|} - 2$

30 $f(x) = \ln|e^{2x} - 3e^x + 2|$

31 Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $3x^2 + 3\cos^2 x - x^4 = 1$

32 Data la funzione Dire quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{|\operatorname{tg} x + \sqrt{3}|}{|\operatorname{tg} x| - 1} = \lambda$$

in ogni periodo della funzione, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

33 Sia $p > 1$. Trovare la più piccola costante $c = c(p)$ tale che

$$t \le \frac{t^p}{p} + c \qquad \text{per ogni } t \ge 0. \tag{1}$$

34 Per $p > 1$, si definisca $q = \dfrac{p}{p-1}$. Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, provare la seguente *disuguaglianza di Young*

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \text{per ogni } x, y \ge 0.$$

(Suggerimento: dividere per una potenza conveniente di y, e con una sostituzione ricondursi alla disuguaglianza (1)).

35 Trovare il dominio della funzione $f(x) = \log\left(\dfrac{|\operatorname{tg} x| - |\operatorname{sen} x|}{x - e\log x}\right)$

36 Data la funzione

$$f(x) = -2x^3 + \alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma\,,$$

trovare tutti i valori di α, β, γ (se esistono) che rendono vera (separatamente) ciascuna delle seguenti proprietà a), b), c), d),

a) f ammette un punto di minimo relativo per $x = 2$ e un punto di flesso per $x = 6$;

b) f ammette un punto di massimo relativo per $x = 2$ e un punto di flesso per $x = 6$;

c) f ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$;

d) f è strettamente decrescente nel suo dominio.

Risposte ad alcuni esercizi

33: $c = \dfrac{p-1}{p}$.